

Vorbereitungskurs Mathematik zum Sommersemester 2015 – Aussagen, Logik und Beweistechniken

Susanna Pohl

Vorkurs Mathematik
TU Dortmund

09.03.2015

Aussagen, Logik und Beweistechniken

- Aussagen und Logik – Motivation
- Was sind Aussagen?
- Logische Verknüpfungen
- Prädikatenlogik
- Die Idee hinter Beweisen
- Beweistechniken – Motivation
- Beweisformen

Aussagen und Logik – Motivation

Wozu betrachten wir Aussagen und Logik?

- Wir betrachten Probleme und versuchen Lösungen zu finden
- Ein Problem zu formulieren hilft es zu lösen
- Mathematik formalisiert Probleme als Aussagen
- Aussagen können bewiesen oder widerlegt werden
- Man muss logisch argumentieren können

Aussagen und Logik – Motivation

Mathematik als Sprache

Mathematik hat. . .

Vokabeln: Notation ($+$, \mathbb{N} , \forall)

Grammatik: Rechenregeln und Konventionen (Klammerung,
„Punkt vor Strich“)

. . . und im Gegensatz zum Deutschunterricht gibt es keinen
Spielraum für Interpretationen.

Aussagen und Logik – Motivation

Beispiel

„Alle geraden n “ $\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist gerade}\}$

$\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist ein Vielfaches von } 2\}$

$\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{Es gibt ein } m, \text{ so dass } n = 2m\}$

$\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} : n = 2m\}$

An dieser Stelle sieht man, warum sich alle geraden Zahlen durch 2 teilen lassen.

Was sind Aussagen?

Beispiele für Aussagen

- „Unter meinem Bett befindet sich ein Krokodil.“
- „Ich habe Schnupfen.“
- „Borussia hat am Samstag gespielt.“
- „ $2m$ ist eine gerade Zahl“
- **Aber:** „Diese Aussage ist falsch.“ ist keine Aussage.

Wahrheitswert einer Aussage

Wahrheitswert: Aussagen können entweder *wahr* oder *falsch* sein.

Notation – wahr: Für *wahr* schreiben wir auch w , *true*, t oder 1 .

Notation – falsch: Für *falsch* schreiben wir auch f , *false* oder 0 .

Vorsicht: Manche Dozenten wünschen die Schreibweise 1 und 0 für den Wahrheitswert nicht! Daher lieber w und f verwenden.

Logische Verknüpfungen

Negation: Die Negation \neg verneint eine Aussage.

Beispiel:

$A =$ „ $2m$ ist eine gerade Zahl“ (w),

$\neg A =$ „ $2m$ ist keine gerade Zahl“ (f).

Konjunktion: Um zwei Aussagen mit einem logischen „und“ zu verbinden, verwenden wir die Konjunktion \wedge .

Beispiel:

$A =$ „ $2m$ ist eine gerade Zahl“ (w),

$B =$ „ $4n$ ist eine gerade Zahl“ (w),

$A \wedge B =$ „ $2m$ ist eine gerade Zahl und $4n$ ist eine gerade Zahl“ (w).

Logische Verknüpfungen

Disjunktion: Ein logisches „oder“ wird durch die Disjunktion \vee ausgedrückt.

Vorsicht: Das logische „oder“ ist nicht exklusiv, d.h. es können auch beide Aussagen wahr sein.

Beispiel:

$A =$ „Ich gehe Freitag ins Kino.“ (w),

$B =$ „Ich werde für Mathe lernen“ (w),

$A \vee B =$ „Ich gehe Freitag ins Kino oder ich werde für Mathe lernen“ (w).

Logische Verknüpfungen

Implikation: Wenn wir aus einer Aussage A eine Aussage B schlussfolgern schreiben wir: $A \Rightarrow B$.

Beispiel:

$A =$ „Unter meinem Bett ist ein Krokodil.“ (f),

$B =$ „Schalke ist Deutscher Meister.“ (f),

$A \Rightarrow B =$ „Wenn unter meinem Bett ein Krokodil ist,
dann ist Schalke Deutscher Meister.“ (w)

Logische Verknüpfungen

Äquivalenz: Die Verknüpfung von den Aussagen A und B zu „genau dann A , wenn B “ wird kurz $A \Leftrightarrow B$ geschrieben. In Englischer Literatur schreibt man auch *iff*, was die Kurzform für *if and only if* ist.

Beispiel:

$A =$ „Mein Computer ist nicht defekt.“ (w),

$B =$ „Ich spiele mit meinen Freunden.“ (w),

$A \Leftrightarrow B =$ „Wenn mein Computer nicht defekt ist, (dann) spiele ich mit meinen Freunden.“ (w).

Logische Verknüpfungen

Wahrheitstafeln

Verknüpfungen von Aussagen können mit Wahrheitstafeln auf ihren Wahrheitswert überprüft werden:

| A | B | $\neg A$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|-----|-----|----------|------------|-------------------|-----------------------|
| w | w | f | w | w | w |
| w | f | f | w | f | f |
| f | w | w | w | w | f |
| f | f | w | f | w | w |

Eine Aussage, die für beliebige Wahrheitswerte immer wahr ist, wird als **Tautologie** bezeichnet.

Logische Verknüpfungen

Wahrheitstafeln

Es gibt einige wichtige Eigenschaften von Aussagen, die man mit Wahrheitstafeln beweisen kann:

| A | $A \wedge f$ | $A \vee f$ | $A \wedge w$ | $A \vee w$ |
|-----|--------------|------------|--------------|------------|
| w | f | w | w | w |
| f | f | f | f | w |

Folgende Regeln lassen sich an der Wahrheitstafel ablesen:

$$(A \wedge f) \Leftrightarrow f$$

$$(A \vee f) \Leftrightarrow A$$

$$(A \wedge w) \Leftrightarrow A$$

$$(A \vee w) \Leftrightarrow w$$

Logische Verknüpfungen

Wichtige Regeln

Seien A, B und C beliebige Aussagen, dann gilt...

Idempotenz $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$
 $(A \vee A) \Leftrightarrow A$

Kommutativität $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
 $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$

Assoziativität $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$
 $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$

Logische Verknüpfungen

Wichtige Regeln

Seien A, B und C beliebige Aussagen, dann gilt...

$$\begin{aligned} \text{Distributivität } (A \vee (B \wedge C)) &\Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \\ (A \wedge (B \vee C)) &\Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De Morgan'sche Regel } \neg(A \vee B) &\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \\ \neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \end{aligned}$$

Logische Verknüpfungen

De Morgan'sche Regel

Wir werden nun versuchen die De Morgan'sche Regel nachzuweisen:

| A | B | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ |
|-----|-----|----------|----------|------------------|------------------------|
| w | w | f | f | f | f |
| w | f | f | w | f | f |
| f | w | w | f | f | f |
| f | f | w | w | w | w |

Prädikatenlogik

Wozu mehr Logik?

- Aussagenlogik reicht nicht aus, um allgemeine Theorien uneingeschränkt darzustellen.
- Gegeben eine Aussage $A(n)$ über alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$.
- Wir können keine Wahrheitstafel für **alle** $n \in \mathbb{N}$ aufstellen.
- Neue Methoden erfordern neue Notation.

Prädikatenlogik

Quantoren

Allquantor Statt „für alle n “ schreiben wir kurz: $\forall n$.

Existenzquantor Statt „es gibt ein n “ schreiben wir kurz: $\exists n$.
Wenn es nur ein n geben soll (ein n , nicht zwei, nicht drei), für das etwas gilt, dann schreiben wir $\exists! n$ oder $\exists_1 n$.

Wenn es kein n geben soll, für das etwas gilt, dann schreiben wir $\nexists n$.

Die Idee hinter Beweisen

Weitere Regeln für Aussagen

Anfangs benutzen alle unsere Beweise Schlussfolgerungen.
 Es gibt einige Regeln, die $A \Rightarrow B$ betreffen:

| A | B | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ | $\neg(A \wedge \neg B)$ |
|-----|-----|----------|----------|-------------------|-----------------------------|-------------------------|
| w | w | f | f | w | w | w |
| w | f | f | w | f | f | f |
| f | w | w | f | w | w | w |
| f | f | w | w | w | w | w |

Damit erhalten wir (etwas später) drei äquivalente Beweistechniken.

Beweistechniken – Motivation

Wozu brauchen wir Beweise?

- Für Übungszettel und Klausuren (nicht nur in Mathematik)
- Beweise vermitteln ein tieferes Verständnis für Strukturen und Zusammenhänge (kommt noch!)
- Beweise sind der sichere Weg Neues zu entdecken und zu erforschen

Beweisformen – Direkter Beweis

Der direkte Beweis

Direkter Beweis – Starte mit A, folgere B: $A \Rightarrow B$

Beispiel

Satz Wenn m eine gerade Zahl ist, dann ist auch m^2 gerade.

Beweis m gerade $\Rightarrow 2n = m$ für ein $n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$
 $\Rightarrow m^2$ gerade □

Beweisformen – Kontraposition

Beweis der Kontraposition

Beweis der Kontraposition – Starte mit $\neg B$, folgere $\neg A$: $\neg B \Rightarrow \neg A$

Beispiel

Satz m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade für alle $m \in \mathbb{N}$

Beweis Sei m beliebig aber ungerade, also $m = 2n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch:

$$\begin{aligned} m^2 &= (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 \\ &\Rightarrow m^2 \text{ ist auch ungerade.} \quad \square \end{aligned}$$

Beweisformen – Widerspruch

Beweis durch Widerspruch

Beweis durch Widerspruch – Nehme an, dass A und $\neg B$ gilt und führe zum Widerspruch: $\neg(A \wedge \neg B)$

Beispiel

Satz Für jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$, p und $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, gilt $(\frac{p}{q})^2 \neq 2$. ($\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch darstellen.)

Aussagen $A = \text{„}\frac{p}{q} \text{ ist eine rationale Zahl, } p \text{ und } q \in \mathbb{N}, q \neq 0\text{“}$
 $B = \text{„}(\frac{p}{q})^2 \neq 2\text{“}$

Annahme $p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$

Beweisformen – Widerspruch

Beispiel

Satz Für jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$, p und $q \in \mathbb{N}$, gilt $(\frac{p}{q})^2 \neq 2$

Annahme $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$

Beweis Durch Kürzen finden wir $c, d, d \neq 0 \in \mathbb{N}$ teilerfremd,

$$\text{mit } \frac{c}{d} = \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow (\frac{p}{q})^2 = (\frac{c}{d})^2 = 2$$

$$\Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c^2 \text{ ist gerade} \Rightarrow c \text{ ist gerade}$$

$$\Rightarrow c = 2n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow 4n^2 = 2d^2$$

$$\Rightarrow 2n^2 = d^2 \Rightarrow d^2 \text{ auch gerade} \Rightarrow d \text{ gerade}$$

$$\Rightarrow c, d \text{ **nicht** teilerfremd}$$



Beweisformen – Vollständige Induktion

Beweis durch (vollständige) Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage über die Zahl $n \in \mathbb{N}$ – zu zeigen: $A(n)$ ist wahr für alle n .

Vorgehen

- IA Induktionsanfang: $A(0)$ ist wahr .
- IV Induktionsvoraussetzung:
Sei $A(n)$ wahr für die ersten n Zahlen bewiesen.
- IS Induktionsschritt / Induktionsschluss:
 $A(n) \rightarrow A(n + 1)$.

Beweisformen – Vollständige Induktion

Beispiel

Satz $A(n) = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

IA $A(1) = \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

IV Es gelte $A(n)$ für die ersten n Zahlen, also

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

IS Überprüfe $A(n+1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \stackrel{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

□

Beispiele und Gegenbeispiele

Wichtiges zu Beispielen

- **Wichtig!** Beispiele beweisen nichts.
- Ein Gegenbeispiel ist **kein** Beweis.
- Mit einem Gegenbeispiel wird eine Aussage nur widerlegt.