technische universität
dortmund

Vorbereitungskurs Mathematik zum Sommersemester 2015 – Aussagen, Logik und Beweistechniken

Susanna Pohl

Vorkurs Mathematik
TU Dortmund

09.03.2015

Aussagen, Logik und Beweistechniken

- Aussagen und Logik – Motivation
- Was sind Aussagen?
- Logische Verknüpfungen
- Prädikatenlogik
- Die Idee hinter Beweisen
- Beweistechniken – Motivation
- Beweisformen

Aussagen und Logik – Motivation

Wozu betrachten wir Aussagen und Logik?

- Wir betrachten Probleme und versuchen Lösungen zu finden
- Ein Problem zu formulieren hilft es zu lösen
- Mathematik formalisiert Probleme als Aussagen
- Aussagen können bewiesen oder widerlegt werden
- Man muss logisch argumentieren können

Aussagen und Logik – Motivation

Mathematik als Sprache

Mathematik hat...

Vokabeln: Notation ($+$, $\mathbb{N}$, $\forall$)

Grammatik: Rechenregeln und Konventionen (Klammerung, „Punkt vor Strich“)

...und im Gegensatz zum Deutschunterricht gibt es keinen Spielraum für Interpretationen.

Aussagen und Logik – Motivation

Beispiel

„Alle geraden n“ $\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist gerade}\}$

$\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist ein Vielfaches von } 2\}$

$\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{Es gibt ein } m\text{, so dass } n = 2m\}$

$\iff \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} : n = 2m\}$

An dieser Stelle sieht man, warum sich alle geraden Zahlen durch 2 teilen lassen.

Was sind Aussagen?

Beispiele für Aussagen

- „Unter meinem Bett befindet sich ein Krokodil.“
- „Ich habe Schnupfen.“
- „Borussia hat am Samstag gespielt.“
- „$2m$ ist eine gerade Zahl“
- **Aber:** „Diese Aussage ist falsch.“ ist keine Aussage.

Wahrheitswert einer Aussage

Wahrheitswert: Aussagen können entweder *wahr* oder *falsch* sein.

Notation – wahr: Für *wahr* schreiben wir auch *w*, *true*, *t* oder *1*.

Notation – falsch: Für *falsch* schreiben wir auch *f*, *false* oder *0*.

Vorsicht: Manche Dozenten wünschen die Schreibweise *1* und *0* für den Wahrheitswert nicht! Daher lieber *w* und *f* verwenden.

Logische Verknüpfungen

Negation: Die Negation $\neg$ verneint eine Aussage.
Beispiel:
$A =$ „$2m$ ist eine gerade Zahl“ (w),
$\neg A =$ “$2m$ ist keine gerade Zahl“ (f).

Konjunktion: Um zwei Aussagen mit einem logischen „und“ zu verbinden, verwenden wir die Konjunktion $\wedge$.
Beispiel:
$A =$ „$2m$ ist eine gerade Zahl“ (w),
$B =$ „$4n$ ist eine gerade Zahl“ (w),
$A \wedge B =$ „$2m$ ist eine gerade Zahl und $4n$ ist eine gerade Zahl“ (w).

Logische Verknüpfungen

Disjunktion: Ein logisches „oder“ wird durch die Disjunktion $\vee$ ausgedrückt.

Vorsicht: Das logische „oder“ ist nicht exklusiv, d.h. es können auch beide Aussagen wahr sein.

Beispiel:

$A =$ „Ich gehe Freitag ins Kino.“ (w),

$B =$ „Ich werde für Mathe lernen“ (w),

$A \vee B =$ „Ich gehe Freitag ins Kino oder ich werde für Mathe lernen“ (w).

Logische Verknüpfungen

Implikation: Wenn wir aus einer Aussage A eine Aussage B schlussfolgern schreiben wir: $A \Rightarrow B$.

Beispiel:

$A =$ „Unter meinem Bett ist ein Krokodil.“ (f),

$B =$ „Schalke ist Deutscher Meister.“ (f),

$A \Rightarrow B =$ „Wenn unter meinem Bett ein Krokodil ist, dann ist Schalke Deutscher Meister.“ (w)

Logische Verknüpfungen

Äquivalenz: Die Verknüpfung von den Aussagen A und B zu „genau dann A, wenn B" wird kurz $A \Leftrightarrow B$ geschrieben. In Englischer Literatur schreibt man auch *iff*, was die Kurzform für *if and only if* ist.

Beispiel:

$A =$ „Mein Computer ist nicht defekt." (w),

$B =$ „Ich spiele mit meinen Freunden." (w),

$A \Leftrightarrow B =$ „Wenn mein Computer nicht defekt ist, (dann) spiele ich mit meinen Freunden." (w).

Logische Verknüpfungen

Wahrheitstafeln

Verknüpfungen von Aussagen können mit Wahrheitstafeln auf ihren Wahrheitswert überprüft werden:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	f
f	f	w	f	w	w

Eine Aussage, die für beliebige Wahrheitswerte immer wahr ist, wird als **Tautologie** bezeichnet.

Logische Verknüpfungen

Wahrheitstafeln

Es gibt einige wichtige Eigenschaften von Aussagen, die man mit Wahrheitstafeln beweisen kann:

A	$A \wedge f$	$A \vee f$	$A \wedge w$	$A \vee w$
w	f	w	w	w
f	f	f	f	w

Folgende Regeln lassen sich an der Wahrheitstafel ablesen:

$(A \wedge f) \Leftrightarrow f$

$(A \vee f) \Leftrightarrow A$

$(A \wedge w) \Leftrightarrow A$

$(A \vee w) \Leftrightarrow w$

Logische Verknüpfungen

Wichtige Regeln

Seien A, B und C beliebige Aussagen, dann gilt...

Idempotenz
$$(A \wedge A) \Leftrightarrow A$$
$$(A \vee A) \Leftrightarrow A$$

Kommutativität
$$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$$
$$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$$

Assoziativität
$$((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$$
$$((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$$

Logische Verknüpfungen

Wichtige Regeln

Seien A, B und C beliebige Aussagen, dann gilt...

Distributivität	$(A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (B \vee C))$
	$(A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (B \wedge C))$
De Morgan'sche Regel	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Logische Verknüpfungen

De Morgan'sche Regel

Wir werden nun versuchen die De Morgan'sche Regel nachzuweisen:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

Prädikatenlogik

Wozu mehr Logik?

- Aussagenlogik reicht nicht aus, um allgemeine Theorien uneingeschänkt darzustellen.
- Gegeben eine Aussage $A(n)$ über alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$.
- Wir können keine Wahrheitstafel für **alle** $n \in \mathbb{N}$ aufstellen.
- Neue Methoden erfordern neue Notation.

Prädikatenlogik

Quantoren

Allquantor Statt „für alle n“ schreiben wir kurz: $\forall n$.

Existenzquantor Statt „es gibt ein n“ schreiben wir kurz: $\exists n$.
Wenn es nur ein n geben soll (ein n, nicht zwei, nicht drei), für das etwas gilt, dann schreiben wir $\exists!\ n$ oder $\exists_1\ n$.
Wenn es kein n geben soll, für das etwas gilt, dann schreiben wir $\nexists n$.

Die Idee hinter Beweisen

Weitere Regeln für Aussagen

Anfangs benutzen alle unsere Beweise Schlussfolgerungen.
Es gibt einige Regeln, die $A \Rightarrow B$ betreffen:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg(A \wedge \neg B)$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Damit erhalten wir (etwas später) drei äquivalente Beweistechniken.

Beweistechniken – Motivation

Wozu brauchen wir Beweise?

- Für Übungszettel und Klausuren (nicht nur in Mathematik)
- Beweise vermitteln ein tieferes Verständnis für Strukturen und Zusammenhänge (kommt noch!)
- Beweise sind der sichere Weg Neues zu entdecken und zu erforschen

Beweisformen – Direkter Beweis

Der direkte Beweis

Direkter Beweis – Starte mit A, folgere B: $A \Rightarrow B$

Beispiel

Satz Wenn m eine gerade Zahl ist, dann ist auch m^2 gerade.

Beweis m gerade $\Rightarrow 2n = m$ für ein $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$
$\Rightarrow m^2$ gerade $\square$

Beweisformen – Kontraposition

Beweis der Kontraposition

Beweis der Kontraposition – Starte mit $\neg B$, folgere $\neg A$: $\neg B \Rightarrow \neg A$

Beispiel

Satz m^2 gerade $\Rightarrow$ m gerade für alle $m \in \mathbb{N}$

Beweis Sei m beliebig aber ungerade, also $m = 2n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch:
$m^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$
$\Rightarrow m^2$ ist auch ungerade. $\square$

Beweisformen – Widerspruch

Beweis durch Widerspruch

Beweis durch Widerspruch – Nehme an, dass A und $\neg B$ gilt und führe zum Widerspruch: $\neg(A \wedge \neg B)$

Beispiel

Satz Für jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$, p und $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, gilt $(\frac{p}{q})^2 \neq 2$. ($\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch darstellen.)

Aussagen $A =$ „$\frac{p}{q}$ ist eine rationale Zahl, p und $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$"
$B =$ „$(\frac{p}{q})^2 \neq 2$"

Annahme $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$

Beweisformen – Widerspruch

Beispiel

Satz Für jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$, p und $q \in \mathbb{N}$, gilt $(\frac{p}{q})^2 \neq 2$

Annahme $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$

Beweis Durch Kürzen finden wir $c, d, d \neq 0 \in \mathbb{N}$ teilerfremd, mit $\frac{c}{d} = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow (\frac{p}{q})^2 = (\frac{c}{d})^2 = 2$

$\Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c^2$ ist gerade $\Rightarrow c$ ist gerade

$\Rightarrow c = 2n,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow 4n^2 = 2d^2$

$\Rightarrow 2n^2 = d^2 \Rightarrow d^2$ auch gerade $\Rightarrow d$ gerade

$\Rightarrow c,\ d$ **nicht** teilerfremd $\square$

Beweisformen – Vollständige Induktion

Beweis durch (vollständige) Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage über die Zahl $n \in \mathbb{N}$ – zu zeigen: $A(n)$ ist wahr für alle n.

Vorgehen

- IA Induktionsanfang: $A(0)$ ist wahr .
- IV Induktionsvoraussetzung:
  Sei $A(n)$ wahr für die ersten n Zahlen bewiesen.
- IS Induktionsschritt / Induktionsschluss:
  $A(n) \to A(n+1)$.

Beweisformen – Vollständige Induktion

Beispiel

Satz $A(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

IA $A(1) = \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

IV Es gelte $A(n)$ für die ersten n Zahlen, also

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

IS Überprüfe $A(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$\square$

Beispiele und Gegenbeispiele

Wichtiges zu Beispielen

- **Wichtig!** Beispiele beweisen nichts.
- Ein Gegenbeispiel ist **kein** Beweis.
- Mit einem Gegenbeispiel wird eine Aussage nur wiederlegt.