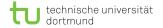


# Vorbereitungskurs Mathematik zum Sommersemester 2015 – Aussagen, Logik und Beweistechniken

Susanna Pohl

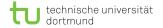
Vorkurs Mathematik TU Dortmund

09.03.2015



# Aussagen, Logik und Beweistechniken

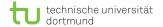
- Aussagen und Logik Motivation
- Was sind Aussagen?
- Logische Verknüpfungen
- Prädikatenlogik
- Die Idee hinter Beweisen
- Beweistechniken Motivation
- Beweisformen



# Aussagen und Logik – Motivation

## Wozu betrachten wir Aussagen und Logik?

- Wir betrachten Probleme und versuchen Lösungen zu finden
- Ein Problem zu formulieren hilft es zu lösen
- Mathematik formalisiert Probleme als Aussagen
- Aussagen können bewiesen oder widerlegt werden
- Man muss logisch argumentieren können



# Aussagen und Logik – Motivation

# Mathematik als Sprache

Mathematik hat...

Vokabeln: Notation  $(+, \mathbb{N}, \forall)$ 

Grammatik: Rechenregeln und Konventionen (Klammerung,

"Punkt vor Strich")

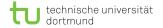
... und im Gegensatz zum Deutschunterricht gibt es keinen

Spielraum für Interpretationen.

# Aussagen und Logik – Motivation

```
", Alle geraden n'' \iff \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist gerade}\}
 \iff \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist ein Vielfaches von 2}\}
 \iff \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{Es gibt ein } m, \text{ so dass } n = 2m\}
 \iff \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z} : n = 2m\}
```

An dieser Stelle sieht man, warum sich alle geraden Zahlen durch 2 teilen lassen.



# Was sind Aussagen?

## Beispiele für Aussagen

- "Unter meinem Bett befindet sich ein Krokodil."
- "Ich habe Schnupfen."
- "Borussia hat am Samstag gespielt."
- "2m ist eine gerade Zahl"
- **Aber:** "Diese Aussage ist falsch." ist keine Aussage.



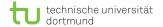
# Wahrheitswert einer Aussage

Wahrheitswert: Aussagen können entweder wahr oder falsch sein.

Notation – wahr: Für wahr schreiben wir auch w, true, t oder 1.

Notation – falsch: Für falsch schreiben wir auch f. false oder 0.

**Vorsicht:** Manche Dozenten wünschen die Schreibweise 1 und 0 für den Wahrheitswert nicht! Daher lieber w und f verwenden.



Negation: Die Negation - verneint eine Aussage.

#### **Beispiel:**

A = ...2m ist eine gerade Zahl" (w),  $\neg A = "2m$  ist keine gerade Zahl" (f).

Konjunktion: Um zwei Aussagen mit einem logischen "und" zu

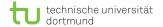
verbinden, verwenden wir die Konjunktion ∧.

#### **Beispiel:**

A = ...2m ist eine gerade Zahl" (w), B = ..4n ist eine gerade Zahl" (w),

 $A \wedge B = 2m$  ist eine gerade Zahl und 4n ist eine

gerade Zahl" (w).



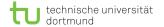
Disjunktion: Ein logisches "oder" wird durch die Disjunktion ∨ ausgedrückt.

> **Vorsicht:** Das logische "oder" ist nicht exklusiv, d.h. es können auch beide Aussagen wahr sein.

#### **Beispiel:**

A = "Ich gehe Freitag ins Kino." (w), B =, Ich werde für Mathe lernen" (w),  $A \vee B =$  "Ich gehe Freitag ins Kino oder ich werde

für Mathe lernen" (w).



Implikation: Wenn wir aus einer Aussage A eine Aussage B schlussfolgern schreiben wir:  $A \Rightarrow B$ .

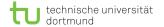
#### Beispiel:

A = "Unter meinem Bett ist ein Krokodil." (f),

B = ,,Schalke ist Deutscher Meister."(f),

 $A \Rightarrow B =$  "Wenn unter meinem Bett ein Krokodil ist,

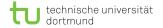
dann ist Schalke Deutscher Meister." (w)



Aquivalenz: Die Verknüpfung von den Aussagen A und B zu ",genau dann A, wenn B" wird kurz  $A \Leftrightarrow B$ geschrieben. In Englischer Literatur schreibt man auch iff, was die Kurzform für if and only if ist.

## **Beispiel:**

A = "Mein Computer ist nicht defekt." (w), B = "Ich spiele mit meinen Freunden." (w),  $A \Leftrightarrow B =$  ... Wenn mein Computer nicht defekt ist, (dann) spiele ich mit meinen Freunden." (w).

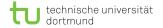


#### Wahrheitstafeln

Verknüpfungen von Aussagen können mit Wahrheitstafeln auf ihren Wahrheitswert überprüft werden:

Α	В	$\neg A$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	f	W	W	W
W	f	f	w	f	f
f	W	W	w	W	f
f	f	W	f	W	w

Eine Aussage, die für beliebige Wahrheitswerte immer wahr ist, wird als **Tautologie** bezeichnet.



#### Wahrheitstafeln

Es gibt einige wichtige Eigenschaften von Aussagen, die man mit Wahrheitstafeln beweisen kann:

Α	$A \wedge f$	$A \vee f$	$A \wedge w$	$A \lor w$
W	f	W	W	W
f	f	f	f	w

Folgende Regeln lassen sich an der Wahrheitstafel ablesen:

$$(A \wedge f) \Leftrightarrow f$$

$$(A \vee f) \Leftrightarrow A$$

$$(A \wedge w) \Leftrightarrow A$$

$$(A \lor w) \Leftrightarrow w$$

## Wichtige Regeln

Seien A, B und C beliebige Aussagen, dann gilt...

Idempotenz 
$$(A \land A) \Leftrightarrow A$$
  
 $(A \lor A) \Leftrightarrow A$ 

Kommutativität  $(A \land B) \Leftrightarrow (B \land A)$  $(A \lor B) \Leftrightarrow (B \lor A)$ 

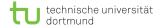
Assoziativität 
$$((A \land B) \land C) \Leftrightarrow (A \land (B \land C))$$
  
 $((A \lor B) \lor C) \Leftrightarrow (A \lor (B \lor C))$ 

#### Wichtige Regeln

Seien A, B und C beliebige Aussagen, dann gilt...

Distributivität 
$$(A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (B \lor C))$$
  
 $(A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (B \land C))$ 

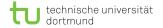
De Morgan'sche Regel 
$$\neg (A \lor B) \Leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$$
  
 $\neg (A \land B) \Leftrightarrow (\neg A \lor \neg B)$ 



#### De Morgan'sche Regel

Wir werden nun versuchen die De Morgan'sche Regel nachzuweisen:

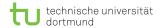
Α	В	$  \neg A$	$\neg B$	$\neg (A \lor B)$	$\neg A \land \neg B$
W	w	f	f	f	f
W	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w



# Prädikatenlogik

#### Wozu mehr Logik?

- Aussagenlogik reicht nicht aus, um allgemeine Theorien uneingeschänkt darzustellen.
- Gegeben eine Aussage A(n) über alle Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ .
- Wir können keine Wahrheitstafel für **alle**  $n \in \mathbb{N}$  aufstellen.
- Neue Methoden erfordern neue Notation.



# Prädikatenlogik

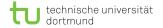
#### Quantoren

Allquantor Statt "für alle n" schreiben wir kurz:  $\forall n$ .

Existenzquantor Statt ",es gibt ein n" schreiben wir kurz:  $\exists n$ .

Wenn es nur ein n geben soll (ein n, nicht zwei, nicht drei), für das etwas gilt, dann schreiben wir  $\exists ! \ n$  oder  $\exists_1 \ n$ .

Wenn es kein n geben soll, für das etwas gilt, dann schreiben wir  $\nexists n$ .



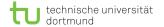
#### Die Idee hinter Beweisen

## Weitere Regeln für Aussagen

Anfangs benutzen alle unsere Beweise Schlussfolgerungen. Es gibt einige Regeln, die  $A \Rightarrow B$  betreffen:

Α	В	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg (A \land \neg B)$
W	w	f	f	W	W	W
W	f	f	W	f	f	f
f	w	W	f	W	w	w
f	f	W	w	W	w	w

Damit erhalten wir (etwas später) drei äquivalente Beweistechniken.



#### Beweistechniken – Motivation

#### Wozu brauchen wir Beweise?

- Für Übungszettel und Klausuren (nicht nur in Mathematik)
- Beweise vermitteln ein tieferes Verständnis für Strukturen und Zusammenhänge (kommt noch!)
- Beweise sind der sichere Weg Neues zu entdecken und zu erforschen

#### Beweisformen – Direkter Beweis

#### Der direkte Beweis

Direkter Beweis – Starte mit A, folgere B:  $A \Rightarrow B$ 

# Beispiel

Satz Wenn m eine gerade Zahl ist, dann ist auch  $m^2$  gerade.

Beweis 
$$m$$
 gerade  $\Rightarrow 2n = m$  für ein  $n \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$   
 $\Rightarrow m^2$  gerade

# Beweisformen – Kontraposition

#### Beweis der Kontraposition

Beweis der Kontraposition – Starte mit  $\neg B$ , folgere  $\neg A$ :  $\neg B \Rightarrow \neg A$ 

# Beispiel

Satz  $m^2$  gerade  $\Rightarrow m$  gerade für alle  $m \in \mathbb{N}$ 

Beweis Sei m beliebig aber ungerade, also m=2n+1 für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt auch:

$$m^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$
  
 $\Rightarrow m^2$  ist auch ungerade.

# Beweisformen – Widerspruch

#### Beweis durch Widerspruch

Beweis durch Widerspruch – Nehme an, dass A und  $\neg B$  gilt und führe zum Widerspruch:  $\neg(A \land \neg B)$ 

## Beispiel

Satz Für jede rationale Zahl  $\frac{p}{q}$ , p und  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 0$ , gilt  $(\frac{p}{q})^2 \neq 2$ .  $(\sqrt{2}$  lässt sich nicht als Bruch darstellen.)

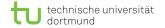
Aussagen A= ,  $\frac{p}{q}$  ist eine rationale Zahl, p und  $q\in\mathbb{N}$ ,  $q\neq0$  " B= ,  $(\frac{p}{q})^2\neq2$ "

Annahme  $p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$ 

# Beweisformen – Widerspruch

# Beispiel

Satz Für jede rationale Zahl  $\frac{p}{q}$ , p und  $q \in \mathbb{N}$ , gilt  $(\frac{p}{q})^2 \neq 2$ Annahme  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 0 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$ Beweis Durch Kürzen finden wir  $c, d, d \neq 0 \in \mathbb{N}$  teilerfremd, mit  $\frac{c}{d} = \frac{p}{q}$   $\Rightarrow (\frac{p}{q})^2 = (\frac{c}{d})^2 = 2$   $\Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c^2 \text{ ist gerade} \Rightarrow c \text{ ist gerade}$   $\Rightarrow c = 2n, \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow 4n^2 = 2d^2$   $\Rightarrow 2n^2 = d^2 \Rightarrow d^2 \text{ auch gerade} \Rightarrow d \text{ gerade}$   $\Rightarrow c, d \text{ nicht teilerfremd}$ 



# Beweisformen – Vollständige Induktion

## Beweis durch (vollständige) Induktion

Sei A(n) eine Aussage über die Zahl  $n \in \mathbb{N}$  – zu zeigen: A(n) ist wahr für alle n.

# Vorgehen

- IA Induktionsanfang: A(0) ist wahr.
- IV Induktionsvoraussetzung: Sei A(n) wahr für die ersten n Zahlen bewiesen.
- IS Induktionsschritt / Induktionsschluss:  $A(n) \rightarrow A(n+1)$ .

# Beweisformen – Vollständige Induktion

#### **Beispiel**

Satz 
$$A(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

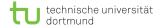
IA 
$$A(1) = \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

IV Es gelte A(n) für die ersten n Zahlen, also

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

IS Überprüfe A(n+1):

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \stackrel{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$



# Beispiele und Gegenbeispiele

#### Wichtiges zu Beispielen

- Wichtig! Beispiele beweisen nichts.
- Ein Gegenbeispiel ist **kein** Beweis.
- Mit einem Gegenbeispiel wird eine Aussage nur wiederlegt.