technische universität
dortmund

Vorbereitungskurs Mathematik zum Sommersemester 2015 – Mengen und Relationen

Susanna Pohl

Vorkurs Mathematik
TU Dortmund

10.03.2015

Mengen und Relationen

- Mengen – Motivation
- Beschreibung von Mengen
- Mengenoperationen und Venn-Diagramme
- Mengengesetze
- Mächtigkeit von Mengen
- Relationen
- Äquivalenzrelationen
- Äquivalenzklassen

Mengen – Motivation

Definition der Menge

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Georg Cantor

technische universität dortmund

Beschreibung von Mengen

Möglichkeiten Mengen zu beschreiben

- Durch Aufzählung der Elemente:
  $M = \{\text{Freitag, Samstag, Sonntag}\}$
- Elemente durch ein Prädikat charakterisierend:
  $M = \{m \mid A(m)\}$
  $M = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z} : m = 2n\}$

Wir schreiben $a \in M$ („a ist Element der Menge M“) oder $a \notin M$ („a ist kein Element der Menge M“).
Wir schreiben $M = \{\ \} = \emptyset$ für die leere Menge (ohne Elemente).

Mengenoperationen

Mengenrelationen

Gleichheit $M = N$, genau dann wenn $m \in M \Leftrightarrow m \in N$ gilt.

Teilmenge $N \subseteq M$, genau dann wenn $m \in N \Rightarrow m \in M$.
$N \subset M$, genau dann wenn $N \subseteq M \wedge N \neq M$.

Potenzmenge

Sei M eine Menge. Die Potenzmenge ist definiert durch:
$\mathcal{P}(M) = \{M^\star \mid M^\star \subseteq M\}$

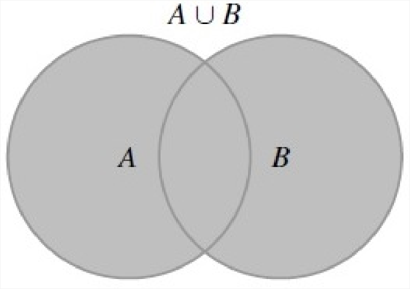
Potenzmenge – Beispiel

Sei $M = \{a, b, c\}$. Dann ist die Potenzmenge zu M:
$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Mengenoperationen und Venn-Diagramme

Verknüpfungen von Mengen

Vereinigung $A \cup B = \{m \mid m \in A \vee m \in B\}$

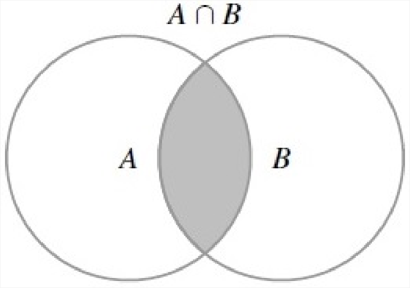


technische universität
dortmund

Mengenoperationen und Venn-Diagramme

Verknüpfungen von Mengen

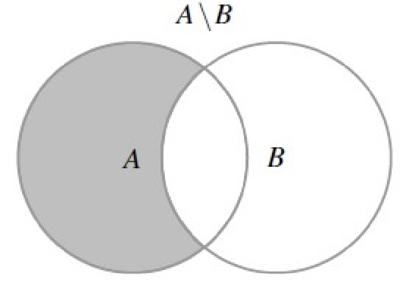
Schnitt $A \cap B = \{m \mid m \in A \wedge m \in B\}$



Mengenoperationen und Venn-Diagramme

Verknüpfungen von Mengen

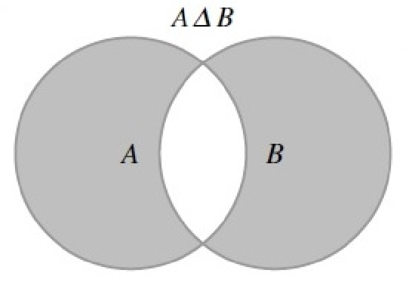
Differenz $A \setminus B = \{m \mid m \in A \land m \notin B\}$



Mengenoperationen und Venn-Diagramme

Verknüpfungen von Mengen

Differenz $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$



Mengengesetze

Seien A, B, C Teilmengen einer gemeinsamen Grundmenge M.
Dann gilt:

Kommutativität	$A \cap B = B \cap A$
	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativität	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distribitivität	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Komplement	$A \cap A^C = \emptyset$
	$A \cup A^C = M$

Mengengesetze

Seien $A,\ B,\ C$ Teilmengen einer gemeinsamen Grundmenge M. Dann gilt:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Idempotenz} & A \cap A = A \\
& A \cup A = A \\
\text{Doppelkomplement} & A^{CC} = A \\
\text{De Morgan'sche Gesetze} & (A \cap B)^C = A^C \cup B^C \\
& (A \cup B)^C = A^C \cap B^C \\
\text{Neutralität} & M \cap A = A \\
& \emptyset \cup A = A
\end{array}
$$

Mengengesetze und Mächtigkeit von Mengen

Erweiterte Vereinigungen und Schnitte

Sei $\mathcal{M}$ ein Mengensystem über einer Grundmenge M. Dann gilt:

- $\bigcup\limits_{\overline{M}\in\mathcal{M}} \overline{M} = \{m \in M | \exists \overline{M} \in \mathcal{M} : m \in \overline{M}\}$
- $\bigcap\limits_{\overline{M}\in\mathcal{M}} \overline{M} = \{m \in M | \forall \overline{M} \in \mathcal{M} : m \in \overline{M}\}$

Mächtigkeit

Unter der Mächtigkeit $|M|$ einer Menge M verstehen wir die Anzahl der Elemente in M.
Die Mächtigkeit der leeren Menge beträgt 0: $|\emptyset| = 0$

Relationen

Beispiel – Kartesisches Produkt

Seien A und B Mengen. Das kartesische Produkt wird dann wie folgt definiert:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\}$$

$(a, b) \in A \times B$ ist ein geordnetes Paar.

Für alle $a, \tilde{a} \in A$ und $b, \tilde{b} \in B$ gilt: $(a, b) = (\tilde{a}, \tilde{b}) \Leftrightarrow a = \tilde{a} \land b = \tilde{b}$

Relationen

Definition

Eine (binäre) Relation auf einer Menge M bezieht sich auf je zwei Elemente $a, b \in M$ (unter Beachtung der Reihenfolge). Es wird für jedes mögliche Paar (a, b) festgelegt, ob diese beiden Elemente in dieser Reihenfolge in Relation stehen.

Eine Relation wird im Allgemeinen mit $\mathcal{R}$ bezeichnet. Man schreibt $a\mathcal{R}b$, wenn a und b in Relation zueinander stehen.

Eigenschaften von Relationen

Definition

Eine Relation $\mathcal{R}$ kann (u.a.) folgende Eigenschaften haben:

Reflexivität	$a\mathcal{R}a$
Symmetrie	$a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$
Transitivität	$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$
Antisymmetrie	$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$
Asymmetrie	$a\mathcal{R}b \Rightarrow \neg(b\mathcal{R}a)$
Totalität	$a \neq b \Rightarrow a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a$

Beispiel – Übung

Gleichheitsrelation

- **Reflexivität:** $a = a$ ✓
- **Symmetrie:** $a = b \Rightarrow b = a$ ✓
- **Transitivität:** $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$ ✓
- **Antisymmetrie:** $a = b \wedge b = a \Rightarrow a = b$ ✓
- **Asymmetrie:** $a = b \Rightarrow \neg(b = a)$
- **Totalität:** $a \neq b \Rightarrow a = b \vee b = a$

Äquivalenzrelationen

Definition

Eine **Äquivalenzrelation** $\sim$ ist eine Relation nach dem Vorbild der Gleichheitsrelation („$=$“); also mit den folgenden Eigenschaften:

Reflexivität $a \sim a$

Symmetrie $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

Transitivität $a \sim b \land b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Äquivalenzrelationen – Beispiel

Definition

Für $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiere $a \mod n$ als den Rest der Division von a durch n.

Beispiel

- $4 : 2 = 2$ Rest $0 \Rightarrow 4 \mod 2 = 0$
- $5 : 2 = 2$ Rest $1 \Rightarrow 5 \mod 2 = 1$
- $25 : 3 = 8$ Rest $1 \Rightarrow 25 \mod 3 = 1$

Äquivalenzklassen

Definition

Sei $\sim$ über M eine Äquivalenzrelation. Dann ist für ein $m \in M$ seine **Äquivalenzklasse** definiert durch:
$[m]_\sim := \{m' \in M \mid m \sim m'\}$

Satz

- Zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt.
- Jedes Element der Grundmenge ist in genau einer Äquivalenzklasse enthalten.

Äquivalenzklassen – Beispiele

Beispiel „$=_2$“

- $=_2$ auf $\mathbb{Z}$ hat die Äquivalenzklassen
  $[0]_{=_2} = \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\}$,
  $[1]_{=_2} = \{\dots, -1, 1, 3, 5, \dots\}$.

Beispiel „$=_5$“

- $=_5$ auf $\mathbb{Z}$ hat die Äquivalenzklassen
  $[0]_{=_5} = \{\dots, -5, 0, 5, 10, \dots\}$,
  $[1]_{=_5} = \{\dots, -4, 1, 6, 11, \dots\}$,
  $[2]_{=_5} = \{\dots, -3, 2, 7, 12, \dots\}$,
  $[3]_{=_5} = \{\dots, -2, 3, 8, 13, \dots\}$,
  $[4]_{=_5} = \{\dots, -1, 4, 9, 14, \dots\}$.