technische universität
dortmund

Vorbereitungskurs Mathematik zum Sommersemester 2015 – Zahlen und Rechenregeln

Susanna Pohl

Vorkurs Mathematik
TU Dortmund

11.03.2015

Zahlen und Rechenregeln

- Ordnungsrelationen
- Summen und Produkte
- Vollständige Induktion
- Potenzen
- Fakultät und Binomialkoeffizient
- Binomischer Lehrsatz

Halbordnung / totale Ordnung

Definition

Eine **Halbordnung** oder **partielle Ordnung** auf einer Menge M ist eine Relation $\preceq$ auf M mit:

- **Reflexivität**: $a \preceq a$
- **Transitivität**: $a \preceq b \wedge b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$
- **Antisymmetrie**: $a \preceq b \wedge b \preceq a \Rightarrow a = b$

Definition

Eine **totale Ordnung** oder **lineare Ordnung** auf einer Menge M ist eine Halbordnung $\preceq$ auf M, die zusätzlich noch total ist:

- **Totalität**: $a \neq b \Rightarrow a \preceq b \vee b \preceq a$.

Summen und Produkte

Summe – Definition

$$\sum_{i=1}^{n} x_i := x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n$$

Sprich: Summe von $i = 1$ bis n über x_i.

Produkt – Definition

$$\prod_{i=1}^{n} x_i := x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_{n-1} \cdot x_n$$

Sprich: Produkt von $i = 1$ bis n über x_i.

Summen und Produkte

Leere Summe und Produkte

Sei $n < m$.

- $\sum_{k=m}^{n} x_k := 0$
- $\prod_{k=m}^{n} x_k := 1$

Vollständige Induktion

Beweis durch (vollständige) Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage über die Zahl $n \in \mathbb{N}$ – zu zeigen: $A(n)$ ist wahr für alle n.

Vorgehen

- IA Induktionsanfang: $A(0)$ ist wahr .
- IV Induktionsvoraussetzung:
  Sei $A(n)$ wahr für die ersten n Zahlen bewiesen.
- IS Induktionsschritt / Induktionsschluss:
  $A(n) \to A(n+1)$.

Vollständige Induktion

Beispiel

Satz $A(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

IA $A(1) = \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

IV Es gelte $A(n)$ für die ersten n Zahlen, also

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

IS Überprüfe $A(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{IV}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$\square$

Potenzen

Definition

Für $b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ setzt man $b^n := \prod_{k=1}^{n} b$ und $b^{-n} := \frac{1}{b^n}$.

Insbesondere gilt

$b^0 = 1$ und $0^0 = 1$

Rechenregeln

- $b^m b^n = b^{m+n}$
- $a^n b^n = (ab)^n$
- $(b^m)^n = b^{mn}$
- b^{m^n} ist stets als $b^{(m^n)}$ zu verstehen.

Binomialkoeffizient

Definition

Die **Fakultät** von $n \in \mathbb{N}_0$ ist definiert durch $n! := \prod_{k=1}^{n} k$.

Insbesondere ist $0! = 1$.

Definition

Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ ist definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Sprich: „n über k“

Eigenschaften des Binomialkoeffizienten

Satz

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Beweis

Nachrechnen! $\square$

Pascalsches Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

Binomische Formeln

Satz

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beweis

Folgt aus der Definition der Potenzen und den Rechenregeln für reelle Zahlen. $\square$

Binomischer Lehrsatz

Herkunft des Binomischen Lehrsatzes

Wir kennen also:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Betrachte nun:
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3$

Sollte uns bekannt vorkommen: Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Binomischer Lehrsatz

Satz

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Beweis

Induktionsanfang $n = 0$: $(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^0 b^{0-k}$ ✓

Induktionsvoraussetzung: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ sei für die ersten n Zahlen bewiesen.

Induktionsschritt: An der Tafel.