technische universität
dortmund

Vorbereitungskurs Mathematik zum Sommersemester 2015 – Folgen und Reihen

Susanna Pohl

Vorkurs Mathematik
TU Dortmund

12.03.2015

Folgen und Reihen

- Folgen und Grenzwerte
- Rechenregeln für konvergente Folgen
- Monotone Folgen und Teilfolgen
- Reihen
- Absolut konvergente Reihen
- Die Exponentialreihe
- Potenzreihen

Folgen und Grenzwerte

Folge – Definition

Unter einer **Folge** versteht man eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Man schreibt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, \dots)$

Beispiele

- $a_n = a$ definiert die **konstante Folge** für alle $n \in \mathbb{N}$
- $a_n = \frac{1}{n}$ definiert die Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$
- $a_n = (-1)^n$ definiert die Folge $1, -1, 1, -1, \dots$

Folgen und Grenzwerte

Rekursive Folgen – Beispiele

- $a_1 = 1,\ a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ definiert $1, 2, 4, 8, \ldots$
- **Fibonacci-Folge**
  $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
  definiert $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$
  Leonardo Fibonacci versuchte damit 1202 das Wachstum einer Kaninchenpopulation zu beschreiben.

Folgen und Grenzwerte

Konvergente Folgen – Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.
Beachte, dass n_0 von ϵ abhängt!

Grenzwert und Nullfolge – Definition

Falls f gegen a konvergiert, so nennt man a den **Grenzwert** von f und schreibt:
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.
Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt **Nullfolge**.

Folgen und Grenzwerte

Divergenz – Definition

Eine Folge die nicht konvergiert heißt **divergent**.

Eindeutigkeit von Grenzwerten

Der Grenzwert einer Folge ist, falls er existiert, eindeutig.

Beweis (Eindeutigkeit mit $\epsilon/2$)

Für den Beweis brauchen wir erst wichtige Eigenschaften des Betrags und insbesondere die Dreiecksungleichung.

Einschub – Betrag und Dreiecksungleichung

Eigenschaften des Absolutbetrags

Der Absolutbetrag hat folgende Eigenschaften

- $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0 \land (|x| = 0 \Rightarrow x = 0)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$ **Dreiecksungleichung**

Für $a, x, \epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$ gilt:

- $|x| < \epsilon \Leftrightarrow x < \epsilon$ und $-\epsilon < x \Leftrightarrow -\epsilon < x < \epsilon$
- $|x - a| < \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < x < a + \epsilon$

Diese Aussagen gelten auch, wenn man $<$ durch $\leq$ ersetzt wird.

Folgen und Grenzwerte

Beweis (Eindeutigkeit mit $\epsilon/2$)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Angenommen, der Grenzwert ist nicht eindeutig: $\exists a, a',\ a \neq a' : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a'$.
Dann existiert ein ϵ mit $0 < \epsilon < |a - a'|/2 \Rightarrow 2\epsilon < |a - a'|$.
Da sowohl a als auch a' Grenzwert sind, muss ein n_0 existieren, sodass für alle $n \geq n_0$: $|a_n - a| < \epsilon$ und $|a_n - a'| < \epsilon$. Damit gilt aber dann auch

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < 2\epsilon$$

Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, sodass $a = a'$ gelten muss. $\square$

Folgen und Grenzwerte

Beispiele

- Die konstante Folge $(a, a, \dots)$ konvergiert gegen a.
- Für die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Die Folge $(-1)^n$ divergiert.
  Beweis: Angenommen, die Folge würde gegen a konvergieren, dann gibt es nach Definition für $\epsilon = 1$ ein n, sodass
  $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Es gilt aber
  $2 = |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)|$
  $\leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a|$
  $< 1 + 1 = 2$
  Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. $\square$

Folgen und Grenzwerte

Beschränkte Folgen – Definition

Eine Folge $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **nach oben** (**nach unten**) **beschränkt**, falls es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ($a_n \geq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$).
Eine Folge heißt **beschränkt** falls $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Divergent gegen ∞

Eine Folge $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent gegen ∞**, falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0,\ a_n > 0$ und $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N},n\geq n_0}$ gegen 0 konvergiert.

Folgen und Grenzwerte

Konvergente und beschränkte Folgen

Jede konvergente Folge f ist beschränkt.

Bemerkung: Die Umkehrung des Satzes gilt natürlich nicht, da z.B. $a_n = (-1)^n$ beschränkt, aber nicht konvergent ist.

Beweis

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt $|a_n| = |a + a_n - a| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + 1$ für alle $n \geq n_0$.

Setze $K := \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}, |a| + 1)$, dann ist $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Rechenregeln für konvergente Folgen

Grenzwerte kombinierter Folgen

Seien $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $g = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen und $c \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir:

- $f + g = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $c \cdot f = c \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $f \cdot g = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\frac{f}{g} = \frac{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(b_n)_{n\in\mathbb{N}}} = (\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ falls $(b_n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Rechenregeln für konvergente Folgen

Grenzwerte kombinierter Folgen

Seien $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $g = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(f+g) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot f = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} f\cdot g = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)\cdot \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f}{g} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}$ falls $b_n \neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Rechenregeln für konvergente Folgen

Grenzwerte kombinierter Folgen – Anwendung

Berechne den Grenzwert von $a_n = \frac{3n^2+13n}{n^2-2}$ mit $n \in \mathbb{N}$:

- Kürze mit n^2: $a_n = \frac{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{13n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}-\frac{2}{n^2}} = \frac{3+\frac{13}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}$
- Mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$:
  $\lim\limits_{n\to\infty} (3 + \frac{13}{n}) = 3$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{2}{n^2}) = 1$
- Damit gilt insgesamt:
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+\frac{13}{n}}{1-\frac{2}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{13}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n^2})} = \frac{3}{1} = 3$

Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$.
Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Sandwich-Theorem

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$.
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.
Dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Monotone Folgen und Teilfolgen

Monotone Folge – Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- **monoton wachsend**, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **streng monoton wachsend**. falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **monoton fallend**, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **streng monoton fallend**. falls $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Teilfolge – Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine aufsteigende unendliche Folge natürlicher Zahlen, dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = a_{n_1}, a_{n_2}$ eine **Teilfolge** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Monotone Folgen und Teilfolgen

Divergenzkriterium

Besitzt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- eine divergente Teilfolge oder
- zwei konvergente Teilfolgen $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k}) \neq \lim\limits_{l\to\infty}(a_{n_l})$ so ist die Folge divergent.

Monotone Folgen und Teilfolgen

Monotonoiekriterium

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent. Genauer formuliert:

- Ist $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist f konvergent und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Ist $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist f konvergent und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Monotone Folgen und Teilfolgen

Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Häufungspunkt

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt a **Häufungspunkt**, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt und $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{n_k}) = a$.

Monotone Folgen und Teilfolgen

Cauchy-Folge – Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge**, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_{n_0}| < \epsilon$$

Konvergente Folgen und Cauchy-Folgen

- Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.
- Besitzt die Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge, so ist die Cauchy-Folge selbst konvergent.
- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Reihen

Reihe – Definition

Man nennt den formalen Ausdruck
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ eine (unendliche) **Reihe** und
$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ die n-te Teilsumme.

Wenn die Folge der Teilsummen konvergiert, dann heißt die Reihe **konvergent**. Eine nicht konvergente Reihe heißt **divergent**.

Konvergiert sogar $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$, so nennt man die Reihe **absolut konvergent**.

Reihen

Cauchy-Konvergenzkriterium

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \epsilon$ für alle $n \geq m \geq n_0$.

Es gilt offensichtlich $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$.

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergiert genau dann, wenn die Folgen der Teilsummen beschränkt sind.

Reihen

Rechnen mit konvergenten Reihen

- Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, so sind auch $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ konvergent, und es gilt:
  $$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$
  $$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Reihen

Rechnen mit konvergenten Reihen

- Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und $c \in \mathbb{R}$, dann gilt:
  $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
- Für jedes $l \in \mathbb{N}$ mit $l > 1$ gilt: $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ konvergent $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.
- Sind die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent und gilt $a_k \leq b_k \; \forall k \in \mathbb{N}$, so gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Reihen

Leibniz-Kriterium

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine monoton fallende Folge reeller nicht negativer Zahlen mit $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Absolute Konvergenz

Erinnerung

Konvergiert sogar $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, so nennt man die Reihe **absolut konvergent**.

Eigenschaften absolut konvergenter Reihen

Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, so konvergiert sie auch im gewöhnlichen Sinne.

Absolute Konvergenz

Majorantenkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe mit ausschließlich nicht-negativen Gliedern und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Minorantenkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine divergente Reihe mit ausschließlich nicht-negativen Gliedern und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_k \geq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Absolute Konvergenz

Majorantenkriterium – Beispiel

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k^2 \cdot \sqrt{k}}$ konvergiert,

da $\frac{a}{k^2 \cdot \sqrt{k}} \leq \frac{a}{k^2}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ für $n > 1$ konvergiert.

Damit konvergiert natürlich auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k^n} = a \cdot \frac{1}{k^n}$.

Absolute Konvergenz

Wurzelkriterium

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$, sodass $|a_k| \leq c \cdot q^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann ist die Reihe absolut konvergent.

Wurzelkriterium – Beispiel

Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x + \frac{1}{k})^k$ mit $0 \leq x < 1$.

Es gilt $\sqrt[k]{(x + \frac{1}{k})^k} = (x + \frac{1}{k})$ und $\lim\limits_{k \to \infty} (x + \frac{1}{k}) = x < 1$. Damit konvergiert die Reihe.

Absolute Konvergenz

Quotientenkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq n_0$. Es gebe eine Zahl $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$, sodass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$ für alle $k \geq n_0$, dann ist die Reihe absolut konvergent.

Absolute Konvergenz

Quotientenkriterium – Beispiel

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für $x = 0$: trivial.

Für $x \neq 0$: Setze $a_k = \frac{x^k}{k!} \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x}{k+1}\right| = \frac{|x|}{k+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0$$

Daraus folgt die Konvergenz.

Absolute Konvergenz

Umordnung

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert jede Umordnung der Glieder der Reihe gegen den selben Grenzwert.

Die Exponentialreihe

Exponentialreihe – Definition

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die **Exponentialreihe** $\exp(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut konvergent.

Die Exponentialreihe definiert die **Eulersche Zahl**
$e = \exp(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2,71828\ldots$

Es gibt weitere Darstellungen der Eulerschen Zahl, z.B.:
$e = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ oder $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Die Exponentialreihe

Eigenschaften der Exponentialreihe

Für die Exponentialreihe $\exp(x)$ gelten folgende Eigenschaften:

- $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$
- $\forall n \in \mathbb{Z} : \exp(n) = e^n$

Potenzreihen

Potenzreihe – Definition

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und $x \in \mathbb{R}$, dann ist eine **Potenzreihe** $P(x)$ wie folgt definiert:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$