Vorbereitungskurs Mathematik zum Sommersemester 2015 – Funktionen

Susanna Pohl

Vorkurs Mathematik
TU Dortmund

19.03.2015

Funktionen

- Grundlegende Definitionen
- Beschränkte und monotone Funktionen
- Grenzwerte von Funktionen
- Stetige Funktionen
- Polynome
- Logarithmen und allgemeine Potenzen
- Trigonometrische Funktionen

Grundlegende Definitionen

Funktion – Definition

Seien A und B zwei nichtleere Mengen. Eine **Funktion** f mit **Definitionsbereich** A und **Zielbereich** (oder **Bildbereich**) B ist eine Vorschrift, die jedem Element aus A ein eindeutiges Element aus B zuordnet. Wir schreiben $f : A \to B$ und für $a \in A$ ist $f(a) \in B$ das Element, welches Element a zugeordnet wird.

Grundlegende Definitionen

Injektiv – Definition

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt **injektiv**, wenn zu jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ gehört (d.h. $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$).

Surjektiv – Definition

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt **surjektiv**, wenn jedes $y \in B$ als Abbild eines $x \in A$ erscheint (d.h. $\forall y \in B \; \exists x \in A : f(x) = y$).

Grundlegende Definitionen

Bijektiv – Definition

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Umkehrfunktion – Definition

Für eine bijektive Funktion $f : A \to B$ definieren wir die **Umkehrfunktion** $f^{-1} : B \to A$ als $f^{-1}(y) = x$ genau dann, wenn $f(x) = y$.

Grundlegende Definitionen

Rationale Operationen auf Funktionen – Definition

Seien $f, g : a \to \mathbb{R}$ Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $f + g : A \to \mathbb{R}, cf : A \to \mathbb{R}, fg : A \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\
(cf)(x) &= c \cdot f(x), \\
(fg)(x) &= f(x) \cdot g(x).
\end{aligned}
$$

Sei $A' = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$, dann ist die Funktion $\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Grundlegende Definitionen

Konkatenation von Funktionen – Definition

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann ist die Funktion $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Beschränkte und monotone Funktionen

Wir erweitern den Begriff der **Beschränktheit**, den wir bereits für Mengen, Folgen und Reihen definiert haben, auf Funktionen.

Beschränkte Funktion – Definition

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, wenn $|f(x)| \leq K$ für ein festes $K \in \mathbb{R}$ und alle $x \in A$.

Kompaktes Intervall – Definition

Unter einem **kompakten Intervall** versteht man ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Beschränkte und monotone Funktionen

(Streng) monoton wachsend/fallend – Definition

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

$$f \text{ heißt } \left\{\begin{array}{c} \textbf{monoton wachsend} \\ \textbf{streng monoton wachsend} \\ \textbf{monoton fallend} \\ \textbf{streng monoton fallend} \end{array}\right\}, \text{ falls } \left\{\begin{array}{c} f(x) \leq f(x') \\ f(x) < f(x') \\ f(x) \geq f(x') \\ f(x) > f(x') \end{array}\right\}$$

für alle $x, x' \in A$ mit $x < x'$.

Grenzwerte von Funktionen

Berührpunkt und Häufungspunkt – Definition

a heißt **Berührungspunkt** von A, falls in jeder ϵ-Umgebung von a, d.h. $U_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon), \epsilon > 0$, mindestens ein Punkt von A liegt. a heißt **Häufungspunkt**, falls in jeder ϵ-Umgebung von a unendlich viele Punkte von A liegen.

Grenzwerte von Funktionen

Grenzwerte von Funktionen – Definition

Sei $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein Berührungspunkt von A. Man definiert dann $\lim_{x \to a} f(x) = c$, falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in A$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a, \lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$ gilt.

Stetige Funktionen

Stetigkeit – Definition

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in A$. Die Funktion f heißt **stetig im Punkt** a, falls $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
f heißt **stetig** (in A), falls f in jedem Punkt aus A stetig ist.

Stetige Funktionen

Operationen auf stetigen Funktionen – Definition

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $a \in A$ stetig sind und sein $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

i) $f + g : A \to \mathbb{R}$

ii) $cf : A \to \mathbb{R}$

iii) $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$

im Punkt a stetig.

Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion

iv) $\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}$

in a stetig. Dabei ist $A' = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$.

Stetige Funktionen

Komposition stetiger Funktionen

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(A) \subseteq B$. Die Funktion f sei in $a \in A$ und g in $f(a) \in B$ stetig. Dann ist die Funktion $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ stetig.

Stetige Funktionen

Zwischenwertsatz – Definition

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < y < f(b)$ (bzw. $f(a) > y > f(b)$). Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = y$.

Stetige Funktionen

Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

Jede in einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an. Das heißt, es existiert ein $c \in [a, b]$, sodass
$f(c) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ und ein $d \in [a, b]$, sodass
$f(d) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.

ϵ-δ-Definition der Stetigkeit

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann im Punkt $a \in A$ stetig, wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$; sodass $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ für alle $x \in A$ mit $|x - a| < \delta$.

Stetige Funktionen

Gleichmäßige Stetigkeit – Definition

Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt in A **gleichmäßig stetig**, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(x')| > \epsilon$ für alle $x, x' \in A$ mit $|x - x'| < \delta$. Im Unterschied zur Stetigkeit hängt bei der gleichmäßigen Stetigkeit δ nur von ϵ, nicht aber von $a \in A$ ab.

Stetigkeit auf kompakten Intervallen

Jede auf einem kompakten Intervall stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist dort gleichmäßig stetig.