technische universität
dortmund

Vorbereitungskurs Mathematik zum Sommersemester 2015 – Differenzierbare Funktionen

Susanna Pohl

Vorkurs Mathematik
TU Dortmund

23.03.2015

Differenzierbare Funktionen

- Differenzierbarkeit einer Funktion
- Differentiations-Regeln
- Ableitungen höherer Ordnung
- Lokale Extrema und Mittelwertsätze
- Kurvendiskussion

Differenzierbarkeit einer Funktion

Differenzierbarkeit – Definition

Sei $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **in a differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A \setminus \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

Differenzierbarkeit einer Funktion

Ableitung – Definition

$f'(a)$ heißt die **Ableitung** von f in a. Man kann die Ableitung auch darstellen als

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

wobei wir nun Folgen h_k mit $h_k \neq 0$ und $x + h_k \in A$ zulassen.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Ist die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ in $a \in A$ differenzierbar, so ist sie in a auch stetig.

Differentiations-Regeln

Algebraische Operationen

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ in $a \in A$ differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g, c \cdot f, f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar und es gelten folgende Rechenregeln:

i) Linearität: $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

ii) Produktregel: $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

Ist ferner $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt:

iii) Quotientenregel: $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Differentiations-Regeln

Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, das aus mehr als einem Punkt besteht und sei $f : I \to J$ eine stetige, streng monotone Funktion und $g = f^{-1} : J \to I$ deren Umkehrfunktion.
Ist f in $a \in I$ differenzierbar und gilt $f'(a) \neq 0$, so ist g in $b = f(a)$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(n))}.$$

Differentiations-Regeln

Kettenregel

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to \mathbb{R}$ $(A, B \subseteq \mathbb{R})$ Funktionen. Sei f in $a \in A$ differenzierbar und sei g in $b = f(a)$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ in Punkt a differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Ableitungen höherer Ordnung

Ableitungen höherer Ordnung – Definition

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist die **k-te Ableitung** (oder **Ableitung k-ter Ordnung**) von f in $a \in A$ definiert als $f^{(k)}(a)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ mit

1. $f^{(0)}(a) = f(a)$
2. $f^{(k+1)}(a) = (f^{(k)})'(a) : A \to \mathbb{R}$, falls die Ableitung von $f^{(k)}$ in $a \in A$ existiert.

Ableitungen höherer Ordnung

Ableitungen höherer Ordnung – Definition

Für $f : A \to \mathbb{R}$ benutzt man die Schreibweise $f^{(k)}$, wenn die k-te Ableitung für alle $a \in A$ existiert; f heißt dann **k-mal differenzierbar**. Ist $f^{(k)}$ außerdem stetig, so heißt f **k-mal stetig differenzierbar**.

Man schreibt auch

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k}$$

für die k-te Ableitung im Punkt x.

Ableitungen höherer Ordnung

Operationen auf Ableitungen

Sei $k \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}, \emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : A \to \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar. Dann sind $f + g, f - g, c \cdot f, f \cdot g$ und falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$ $\frac{f}{g}$ k-mal differenzierbar und es gilt:

i) $(f + g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) + g^{(k)}(a)$

ii) $(f - g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - g^{(k)}(a)$

iii) $(c \cdot f)^{(k)}(a) = cf^{(k)}(a)$

iv) $(f \cdot g)^{(k)}(a) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(a) \cdot g^{(k-i)}(a)$ (Leibnizsche Formel)

v) $\left(\frac{f}{g}\right)^{(k)}(a) = \frac{f^{(k)}(a) - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left(\frac{f}{g}\right)^{(i)}(a) \cdot g^{(k-i)}(a)}{g(a)}$

Ableitungen höherer Ordnung

Operationen auf Ableitungen

Sei $k \in \mathbb{N}, A, B \subseteq \mathbb{R}, A, B \neq \emptyset$ und seien $f : A \to B$ und $g : B \to \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f$ k-mal differenzierbar.

Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Lokale Extrema – Definition

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann hat f in $x \in A$ ein **lokales Maximum** (**lokales Minimum**), wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $f(x) \geq f(y)$ ($f(x) \leq f(y)$) für alle y mit $|x - y| < \epsilon$ gilt.
Gilt sogar $f(x) > f(y)$ ($f(x) < f(x)$), für alle $y \neq x$ mit $|x - y| < \epsilon$, so spricht man von einem **strikten lokalen Maximum** (**strikten lokalen Minimum**).

Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ besitze im Punkt $x \in A$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann ist $f'(x) = 0$.

Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Monotonie von Funktionen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. f ist genau dann

$$\text{in } [a,b] \left\{ \begin{array}{c} \text{monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton wachsend} \\ \text{streng monoton fallend} \end{array} \right\}, \text{ wenn } \left\{ \begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \\ f'(x) > 0 \\ f'(x) < 0 \end{array} \right\} \forall x \in (a, b).$$

Ist f in $[a, b]$ streng monoton, so ist f dort auch injektiv.

Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Strenges lokales Maximum/Minimum

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die im Punkt $x \in A$ zweimal differenzierbar ist. Falls $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), dann besitzt f in x ein strenges lokales Minimum (strenges lokales Maximum).

Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Regel von L'Hospital $\left(\frac{0}{0}\right)$

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei auf $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktionen. Sei $c \in [a, b]$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b) \setminus \{c\}$.

Gilt $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ und existiert $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$, so existiert auch $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Uneingentlicher Grenzwert

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt von A. Falls für alle $K \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $f(x) > K$ für $|x - a| < \delta$, so schreibt man $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.
Falls $\lim_{x \to a} -f(x) = \infty \iff \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Lokale Extrema undMittelwertsätze

Regel von L'Hospital ($\frac{\infty}{\infty}$)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei auf $[a, b]$ stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktionen. Sei $c \in [a, b]$ und $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b) \setminus \{c\}$.
Gilt $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$ und existiert $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Kurvendiskussion

Kurvendiskussion

1. Symmetrie
2. Verhalten am Rand des Definitionsbereichs
3. Nullstellen
4. Extrempunkte
5. Wendepunkte
6. Funktionsgraph